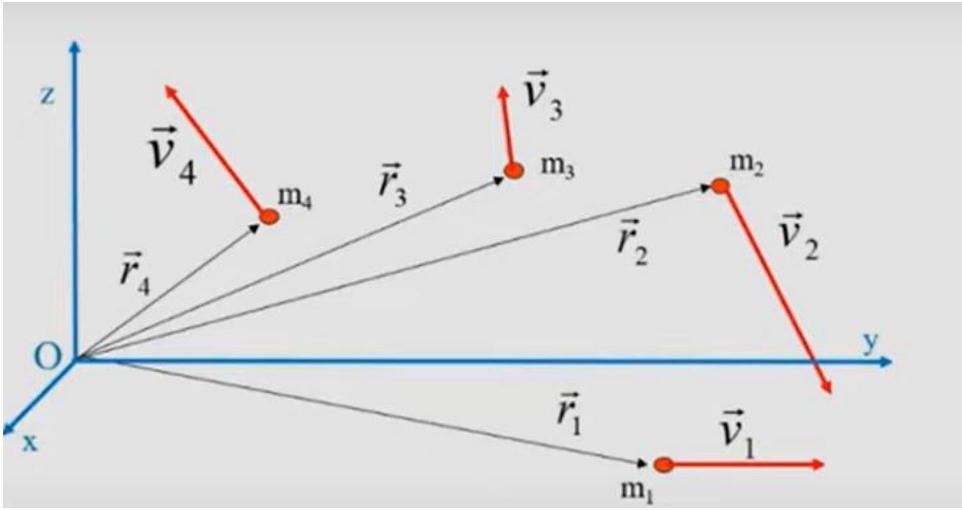
SISTEMA DE PARTÍCULAS

MODELO SISTEMA DE PARTÍCULAS

- Cantidad "N" de partículas de masa puntual.
- Para cada instante cada partícula tiene una determinada masa(m), velocidad(v) y posición (r).
- En cada instante se necesitan 6 valores (3 componentes para posición y 3 para la velocidad) para cada partícula. Así se describe **adecuadamente** el movimiento de una partícula.



CENTRO DE MASA

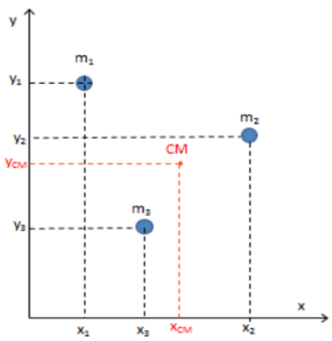
Punto donde **se aplica toda la Fuerza peso**

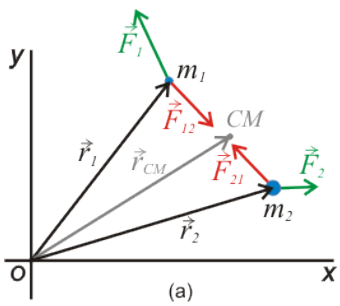
Conjunto de partículas que conozco posición y tiempo en un instante

- Defino un punto que se comportará como si toda la masa estuviera concentrada ahí.
- Defino a partir de su vector posición

$$\overrightarrow{r_{CM}} = \sum \frac{m_i \vec{r_i}}{M} \qquad \overrightarrow{x_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{x_i}}{\sum m_i} \qquad \overrightarrow{y_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{y_i}}{\sum m_i}$$

  - M = masa total del sistema
  - m_i masa de cada partícula
  - $\overrightarrow{r_{CM}}$ vector posición





(a)

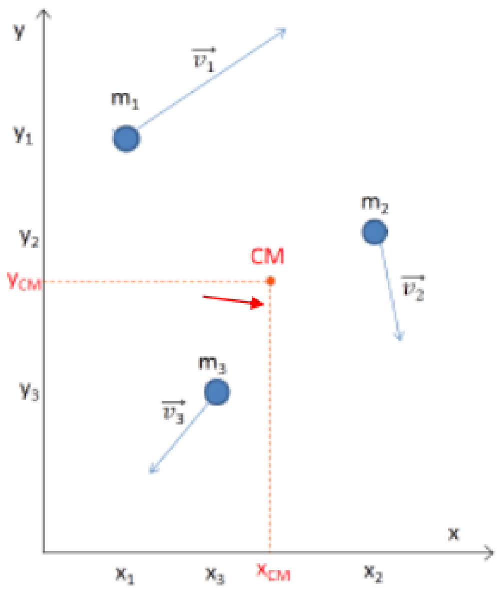
VELOCIDAD DEL CENTRO DE MASA DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS:

Partiendo de la expresión de la posición del centro masa del sistema de partícula se puede encontrar la velocidad del centro de masa **derivando** la expresión anterior.

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\Sigma m_1 \cdot \bar{r}}{M}$$

Suponiendo que la masa de cada partícula **se mantiene constante** y la única variable es la posición. Entonces:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{\Sigma m_i \cdot \bar{v}_i}{M}$$



Para calcular las **velocidades relativas** al CM es:

$$\bar{v}_1 - CM = \vec{v}_1 - CM$$

$$v_{CM} = \frac{\sum m_1(v_1 - CM + \bar{v}_{CM})}{M}$$

De todo esto resulta:

$$\sum m \cdot \bar{v} - CM = 0$$

¡!NOTA:

Este resultado es de suma importancia ya que permitirá definir un sistema de referencia privilegiado asociado al CM

ACELERACIÓN DEL CM

$$\overrightarrow{a_{CM}} = \frac{\sum m_i \vec{a_i}}{M}$$

CANTIDAD DE MOVIMIENTO

$\vec{p} = m\vec{v}$ tiene la *dirección y sentido de la velocidad*

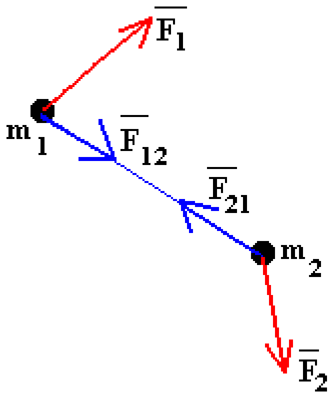
La cantidad de movimiento de un SP será la suma vectorial de las cantidades de movimiento de cada una de las partículas que componen al sistema.

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P_i} = M\overrightarrow{V_{CM}}$$

Recordar: Teorema de conservación de la cantidad de movimiento de una partícula

$$\sum F_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \rightarrow p = cte\ si\ solo\ si\ \sum F = 0$$

PRIMERA ECUACIÓN FUNDAMENTAL



Fuerzas internas
Fuerzas externas

Movimiento de cada una de las partículas depende de todas las F (internas y externas)

Fuerzas internas: actúan debido a que hay otra partícula presente (mi masa está interactuando con otra masa que está dentro de mi conjunto)

Fuerzas externas: fuerzas que sienten las partículas debido a que hay otros cuerpos fuera de mi SP (Normal y peso JUNTAS)

2° LEY DE NEWTON PARA PARTICULA 1:

$$\frac{dP_1}{dt} = \overline{F1} + \overrightarrow{F_{12}}$$

2° LEY DE NEWTON PARA PARTICULA 2:

$$\frac{dP_2}{dt} = \overline{F_2} + \vec{F}_{21}$$

Cantidad de movimiento total

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = \overline{F_1} + \cancel{\vec{F}_{12}} + \overline{F_2} + \cancel{\vec{F}_{21}} = \sum F_{ext}$$

Las fuerzas interiores corresponden a pares de interacción contenidos en el sistema y entonces su suma vectorial es 0

$$\boxed{\sum F_{ext} = \frac{dP}{dt} = Ma_{CM}}$$

Solo las fuerzas exteriores al SP pueden acelerar el CM del sistema

- La cantidad de movimiento de conjunto solo depende de las fuerzas externas.
- Sólo las fuerzas exteriores al sistema pueden cambiar el estado de movimiento del CM del SP

PROPIEDADES DE LA PRIMERA ECUACION FUNDAMENTAL:

I. Válida para N partículas
II. El movimiento del centro de la masa esta determinado exclusivamente por fuerzas externas.
   - La $\overrightarrow{a_{CM}}$ depende de las F externas
III. Si un sistema está aislado las fuerzas externas son nulas (se conserva la cantidad de movimiento)

$$\sum \bar{F}_e = 0 \qquad \frac{d\bar{p}}{dt} = 0 \qquad P = cte$$

Nota: puede hacer F internas y las partículas pueden estar moviéndose, pero $\overrightarrow{a_{CM}} = 0$

IV. Si en un sistema aislado la cantidad de movimiento es constante entonces la velocidad también lo será.

$$P_{cte} = M \cdot \bar{v}_{CM} = cte \rightarrow v_{CM} = cte$$

V. Si la $\bar{v}_{CM}$ es nula (en algún instante) seguirá siendo nula ya que es cte.

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Las fuerzas que actúan sobre cada partícula por un cierto intervalo de tiempo → impulso

$$\vec{J} = \int_0^t \vec{F}\ dt = M.\overrightarrow{v_f} - M.\overrightarrow{v_o}$$

La suma de todos los impulsos es igual a la variación de la cantidad de movimiento de la partícula

$$\sum \overrightarrow{J_i} = \overrightarrow{P_f} - \overrightarrow{P_0}$$

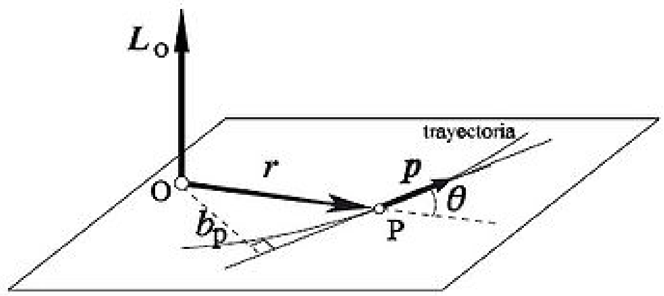
Hay impulsos interiores y exteriores al SP, pero la suma de los impulsos producidos por los pares de interacción es nula

$\sum \overrightarrow{J_{ext}} = \overrightarrow{P_f} - \overrightarrow{P_0}$ los impulsos de las fuerzas exteriores pueden:

- cambiar la cantidad de movimiento de un SP
- cambiar el estado de movimiento del CM de un SP

MOMENTO ANGULAR Y TORQUE PARA UNA PARTICULA

Recordar: momento angular y torque para una partícula



La partícula recorre determinada trayectoria. En cada punto tiene un vector posición ($\vec{r}$) y otro para la cantidad de movimiento ($\vec{p} = m\vec{v}$)

- Momento angular → perpendicular a ambos

$$\overrightarrow{L_0} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Momento angular se mide respecto a un punto P

- L0 depende del centro 0
- Me da una idea de como rota el sistema (regla mano derecha)

Torque

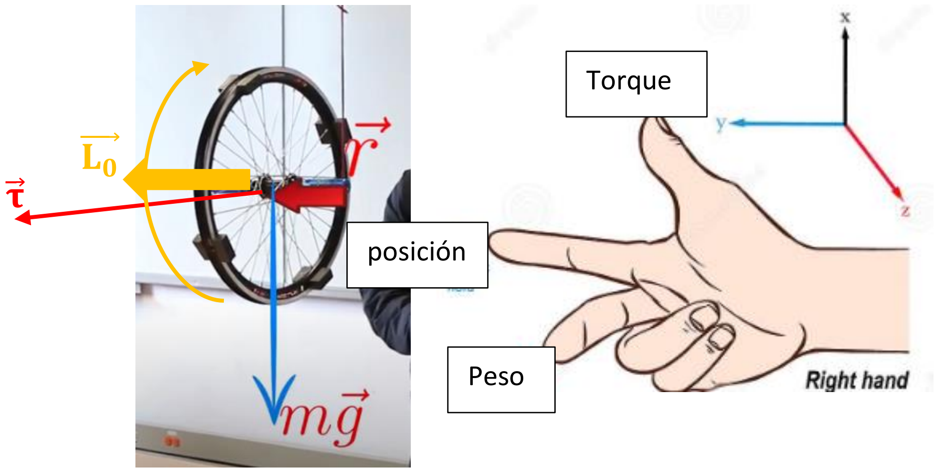
Cambio del momento angular siempre se da en la dirección del Torque.

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\overrightarrow{dL_0}}{dt}$ momento angular cambia hacia donde apunta el torque

$\vec{r}$: me indica el punto de aplicación de la fuerza F

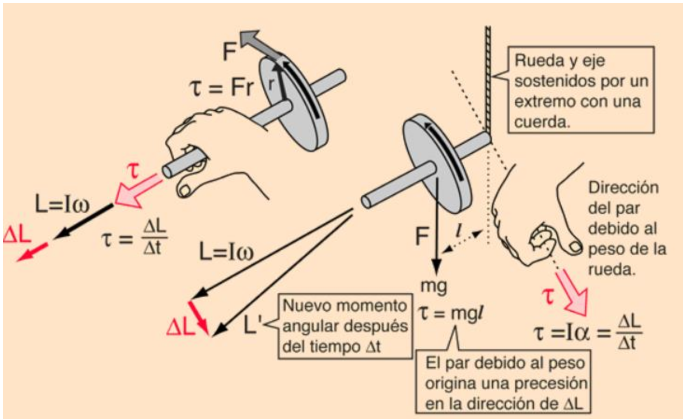
Ejemplo llanta de bicicleta

1. Como van los torques: actúan dos fuerzas
   a. Tensión: toque= 0 porque r = 0
   b. Peso -> $\overrightarrow{\tau_P} = \vec{r} \times \vec{P}$



La flecha naranja (momento angular) tiene a moverse hacia donde apunta la flecha roja (torque)

- Torque cambia el momento angular



Teorema de conservación del momento angular para una partícula

Si el torque es cero → se conserva la cantidad de movimiento angular.

- Cuando la Fuerza o posición es cero
- Cuando la Fuerza es paralela a la posición respecto de O

$$\sum \vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \rightarrow \vec{L}_0 = cte \leftrightarrow \sum \vec{\tau}_0 = 0$$

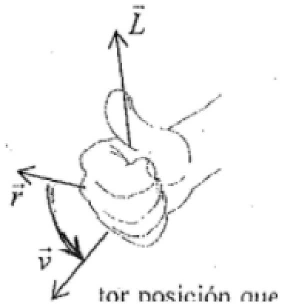
MOMENTO CINÉTICO PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Momento de torque: $\vec{\tau}_0 = \overrightarrow{r_{\iota/o}} \times \vec{F_\iota}$

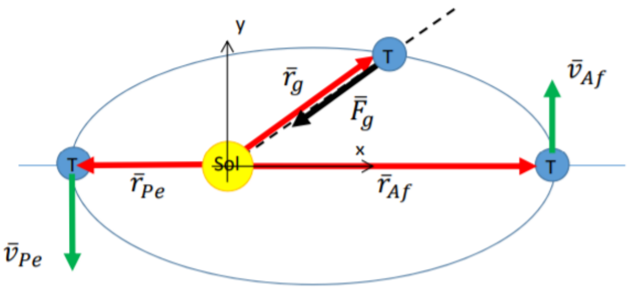
Cantidad de movimiento angular: $\vec{L}_0 = \overrightarrow{r_{\iota/o}} \times \vec{P} = M.\overrightarrow{r_{\iota/o}} \times \vec{v}$

Momento angular depende del punto de donde lo estoy tratando

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum \vec{r}_i \times m_i v_i$$



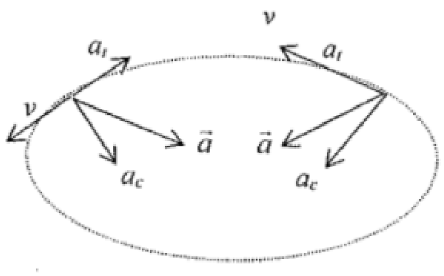
Momento angular en movimientos planetarios



$\vec{\tau}_{sol} = \overrightarrow{r_g} \times \overrightarrow{F_g} = 0 = \frac{dL_{sol}}{dt} \rightarrow L_{sol} = cte$

Puedo igual los momentos angulares de dos puntos

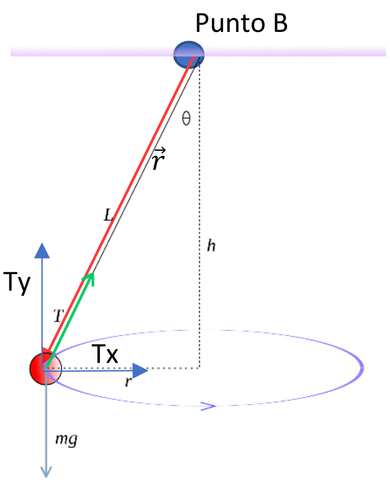
Sacar la velocidad angular: $L_o = M.(\overrightarrow{r_o})^2.\Omega$



La aceleración apunta hacia el centro de la elipse

La componente tangencial apunta a veces a favor de la velocidad y a veces en contra → |v| varia

Péndulo



$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{T} = 0$ porque son paralelos

$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{P} \neq 0$

➔ el momento angular no es constante $\frac{d\overrightarrow{Lo}}{dt} \neq 0$

$T_X = m.a_c$ es la fuerza resultante

Teorema de conservación del momento cinético en un SP(2da ley fundamental)

$$\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F_1} + \vec{r}_2 \times \vec{F_2} + \underbrace{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{F_{21}}} = \frac{d\vec{L_1}}{dt} + \frac{d\vec{L_2}}{dt}$$

Es nulo → ese término está relacionado con las F internas

Momento angular depende de las Fuerzas externas:

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} \rightarrow \vec{L}_0 = cte \leftrightarrow \sum \vec{\tau}_{ext} = 0$$

Momento angular cambia si hay un toque. En un SP aislado donde torque de las fuerzas externas sea nulo, entonces el impulso angular total es constante.

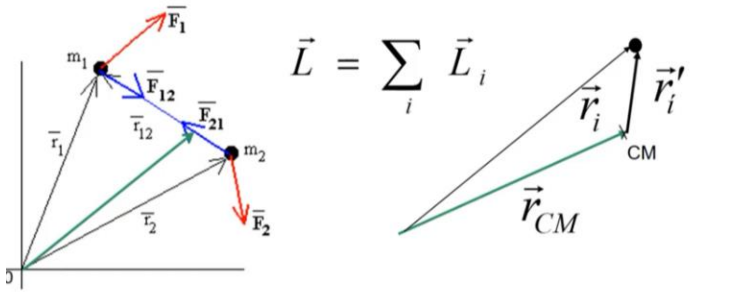
$$\vec{L}_0 = \sum \vec{L}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{p_i}$$

Momento angular para un SP referido al CM y momento cinético total

$\vec{L^*} = \vec{L_1^*} + \vec{L_2^*} = \sum_i r_1^* \times m_i v_i^* \rightarrow$ tengo que buscar las relaciones entre $\vec{r}_{CM}$ y $\vec{r}_1$ $\rightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}_{CM} + \vec{r}^*{}_1$

$$\vec{L}_{sist/O} = \vec{r}_{CM} \times M\vec{v}_{CM} + \sum \overrightarrow{r_{i-CM}} \times m_i \vec{v}_{i-CM}$$

Donde $M\vec{v}_{CM} = \vec{P}_{CM}$



$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i (\vec{r}_{CM} + \vec{r}_i') \times m_i(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i')$$

$$\vec{L}_{sist/O} = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{sist/CM}$$

$\vec{L}_{CM}$: momento cinético orbital

- $\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_{CM}$
- Como se mueve el CM

$\vec{L}_{sist/CM} = \vec{L^*}$: momento cinético de spin.

- Como se mueven las partículas (SP) respecto al CM
- Termino que tiene en cuenta el momento cinético de las partículas alrededor del M
- $\vec{L_S} = \vec{r_i^*} \times m_i \vec{v_i^*}$

El momento cinético de un SP respecto de un punto fijo al LAB es la suma del L del SP como si topa la masa estuviera concentrada en el CM más el L del SP relativo al CM.

El impulso angular orbital es aquel que tiene un cuerpo puntual de igual nada que sigue la misma trayectoria que el CM

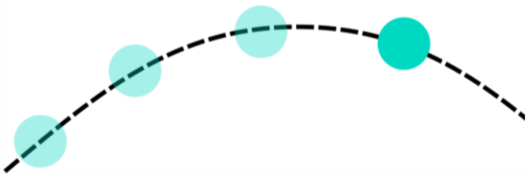
Si el CM está en reposo, en momento cinético del CM es el momento cinético de spin

$\vec{L^*}$ es independiente de donde tomo el punto (centro de momentos)

Ejemplo: Pelota que la lanzo y gira

Adquiere un momento angular orbital → movimiento del CM

Momento angular spin → al girar sobre un eje que pasa por su centro de masa



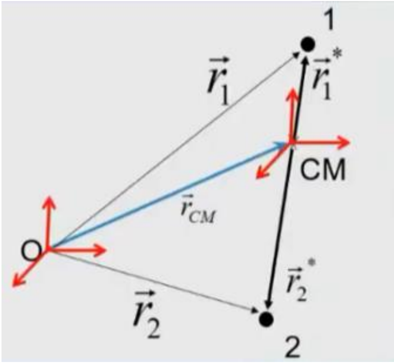
SISTEMA DE REFERENCIA EN EL CM

Un observador sobre el CM de un SP aislado está en SRI

Propiedad 1: $V_{CM}^{*} = 0$

Propiedad 2: $\overrightarrow{P^*} = \sum_i \overrightarrow{p_i^*} = M\overrightarrow{v_{CM}^*} = 0$

Propiedad 3 para un SP de 2 partículas: $\overrightarrow{P^*} = 0 = \overrightarrow{p_1^*} + \overrightarrow{p_2^*}$



TRABAJO Y ENERGIA EN UN SP

En un sistema de partículas éstas pueden moverse libremente → sus desplazamientos no necesariamente son iguales.

Fuerzas interiores que tienen un mismo par de interacción → su trabajo no se cancela porque tengo dezplazamiento diferente

- W_{total}: es la suma de los trabajos de todas las fuerzas actuantes tanto interiores como exteriores al sistema.
- W_{fnc}: es la suma de los trabajos de todas las fuerzas no conservativas, sean estas interiores o exteriores al SP.

ENERGIA POTENCIAL

Si las fuerzas son conservativas tengo una energía potencial

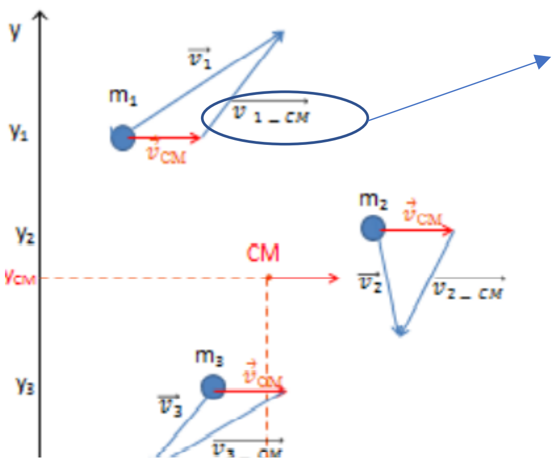
$-\Delta E_P^{ext} = W_{Fcons}^{ext} \quad \leftrightarrow \quad -\Delta E_P^{int} = W_{Fcons}^{int}$

$\Delta Ec = -\Delta E_P^{ext} - \Delta E_P^{int} + W_{FNC}^{int+ext}$

Es la energía potencial gravitatoria del centro de masa del sistema

$$E_{pg} = Mgy_{CM}$$

ENERGÍA CINÉTICA

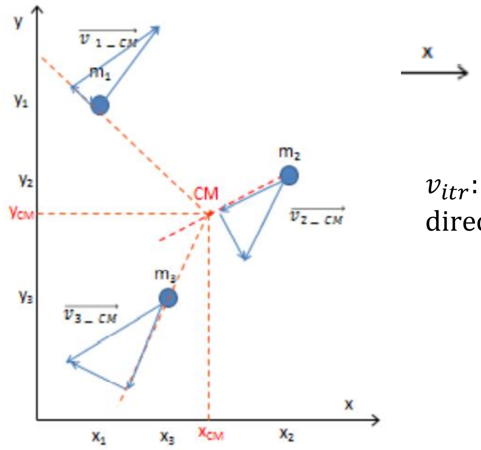


$$\Delta Ec = W_{todaslasF} = \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_{i-CM}^2$$

$$v_i = v_{CM} + v_{i/CM}$$

Velocidad de la partícula relativa al centro de masa → Se puede descomponerse en:

1. dirección radial (dirección que une el punto material con el CM)
2. dirección perpendicular a la anterior que hemos llamado transversa



$$v_{i-CM} = v_{ir} + v_{itr}$$

v_{ir}: dirección radial.

v_{itr}: componentes de la velocidad relativa al CM de cada partícula en la dirección transversal.

$$\text{Ec} = \frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_{ir}^2 + \frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_{itr}^2$$

1. Energía cinética de traslación $\frac{1}{2}M\vec{v}_{CM}^2$ → La energía cinética que tiene el sistema si toda la masa se concentrara en su CM.
2. Energía cinética de expación o compresión $\frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_{ir}^2$ → efectos de deformación del sistema
   - Las partículas se alejan del CM: expansión
   - Las partículas se acercan al CM: compresión
3. Energía cinética de rotación $\frac{1}{2}\sum m_i \vec{v}_{itr}^2$ respecto al CM que tienen las partículas por rotar alrededor del CM (tiene también efectos de deformación ya que no rotan todas con la misma velocidad angular instantánea ni mismo sentido)

VELOCIDADES RELATIVAS..

vver

ECUACIONES GENERALES DE LA DINÁMICA DE UN SP

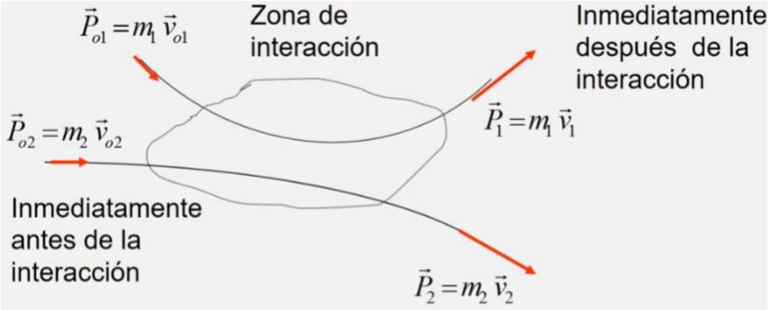
$$\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad \sum \vec{r}_{i-o}\,\vec{F}_{ext} = \frac{dL^0}{dt} \qquad \Delta Ep = -W_{f\,cons(int+ext)}$$

$$\Delta Em = \Delta Ec + \Delta Ep_{ext+int} = W_{FNC(int+ext)} \rightarrow Em = cte \leftrightarrow W_{FNC} = 0$$

COLISIONES

Proceso de interacción de duración sumamente corta que solo tiene lugar cuando las partículas se encuentran muy próximas

Si las partículas que chocan se desplazan a velocidad constante → se conserva la cantidad de movimiento



Sistema aislado

Si $\vec{P} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = cte \leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{ext}} = 0$

$\overrightarrow{P_o} = \overrightarrow{P_f} \qquad \overrightarrow{p_{o1}} + \overrightarrow{p_{o2}} = \overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2}$

$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \int \vec{F}_{ext} dt \rightarrow$ la integral = 0 si la cantidad de movimiento se conserva

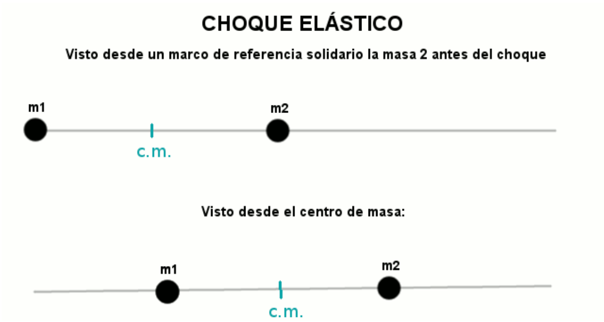
<u>Tipos de choques</u>

Cuando pruevo que P = cte durante el choque se clasifica según sea la ΔEc del sistema en ese intervalo $\overrightarrow{P_i} = \overrightarrow{P_f}$.

1. Choque elástico

$\Delta Ec = 0$ se conserva la energía cinética (y mecánica)

Los cuerpos después de chocar asquieren exactamente la forma que tenían antes del choque (no deformaciones)



$(\overrightarrow{V_f})^2 = (\overrightarrow{V_o})^2$

2. Choque plástico o perfectamente inelástico

$\Delta Ec \neq 0, \Delta Ec < 0, |Ec| = máx$

Las partículas quedan pegadas después del choque → al final tiene una vf

Pierdo LA MÁXIMA cantidad de energía cinética que puedo llegar a perder

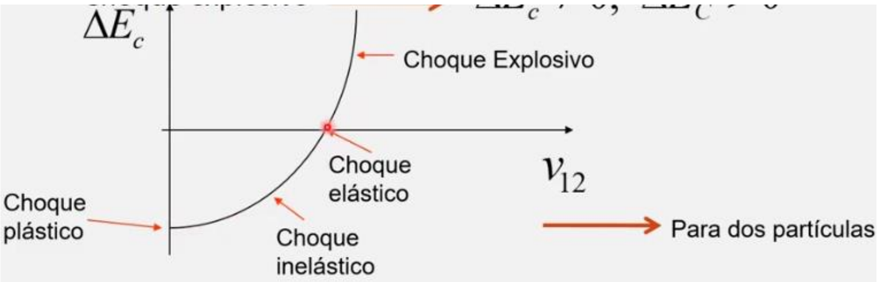
3. Choque inelástico

$\Delta Ec \neq 0, \Delta Ec < 0$

Cuerpos quedan pegados y deformados depueés del choque

Energía potencia de deformación → grados en el que se pierde la energía mecánica

Sigo perdiendo energía cinética



CHOQUES EN UNA DIMENSION

CUERPO RÍGIDO

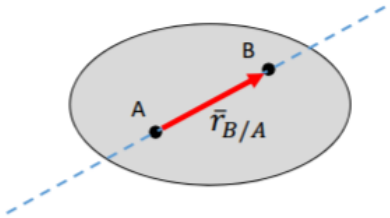
Definición

Es un sistema de partículas que están unidas de forma tal que la distancia entre ellas es constante

- ninguna fuerza y/o torque que actúe sobre el rígido cambiará la distancia que tiene una partícula respecto a las demás.

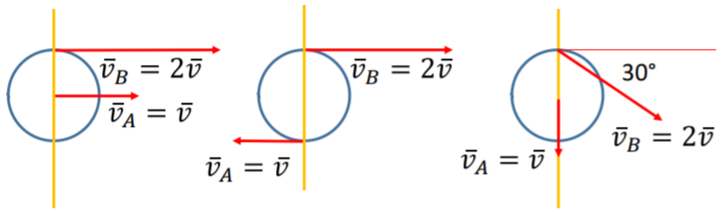
<u>Condición de rigidez</u>

Distancia AB es constante $|r_{AB}| = cte$



No se desplaza una partícula respecto a la otra

$(\vec{r_A} - \vec{r_B}).(\vec{v_A} - \vec{v_B}) = \mathbf{0}$ En la recta que une a los dos vectores, la componente de la velocidad tiene que ser la misma



SI SI SI (Ej.2 de la guía)

La componente de la velocidad en la recta que une a los puntos es la misma $|v_A| = |v_B|$

La diferencia de las velocidades (velocidad relativa) es perpendicular a la recta que los une

<u>Grados de libertad</u>

Para una partícucula el movimiento esta determinado por 3 números para la componente de velocidad

- 3 grados de libertdad
- SP de N particulas 3.N grados

Cuerpo rígido → cuerpo rígido tine 6 grados de liberdad

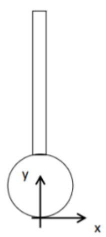
- 3 componentes de la V_{CM} y 3 componentes de la Ω

<u>Centro de masa</u>

Si el cuerpo es homogéneo, el centro de masa coincide con el centro

$\overrightarrow{r_{CM}} = \frac{\sum M_i * \vec{r_i}}{M_{TOT}} = \frac{\int \vec{r} * \delta * dV}{M_{TOT}}$ donde dV es el diferencial de volumen

Dos cuerpos homgéneos unidos rígidamente



Barra de masa 2m y longitud L=4d

Disco de masa m y radio R =d

$$\bar{r}_{CM} = \frac{M_b \cdot \bar{r}_{CMb} + M_d \cdot \bar{r}_{CMd}}{M_{Tot}}$$

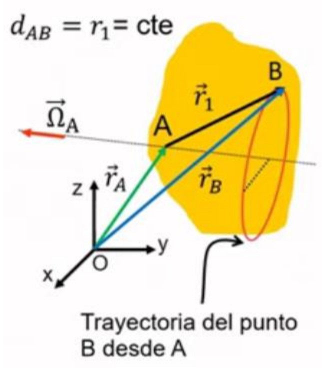
$$\bar{r}_{CM} = \frac{2m \cdot (2R + \frac{L}{2})\check{j} + m \cdot R\check{j}}{3m}$$

$$\bar{r}_{CM} = \frac{2m \cdot 4d\check{j} + m \cdot d\check{j}}{3m} = 3d\check{j}$$

¿Por qué el centro de masa es un punto de interes? → por el teorema de conservación de cantidad de movimiento lineal: describe el comportamiento del CM

$$\sum \vec{F} = M * \overrightarrow{a_{CM}}$$

Posición de los puntos de cuerpo rígido



$\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r_1}$ si derivo esta expresión obtengo

$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \frac{\overrightarrow{dr_1}}{dt}$ donde el último término es constante (la distancia entre A-B no cambia)

$\overrightarrow{v_B} = \overrightarrow{v_A} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_1}$

CINEMÁTICA DEL CUERPO RÍGIDO

Traslación pura

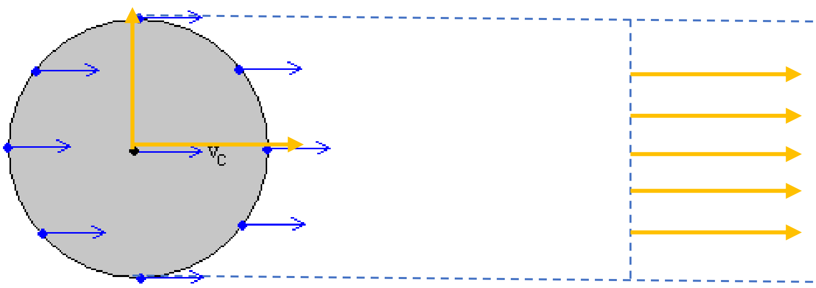
Todos los puntos:

- Siguen trayectorias paralelas
- Tienen igual velocidad y cambian de la misma forma a través del tiempo (mima aceleración)

Pienso al CR como un cuerpo puntual. Punto representativo → centro de masa

$\overrightarrow{r_B} = \overrightarrow{r_A} + \overrightarrow{r'}$ $\quad \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_B}$ $\quad \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_B}$

<u>Perfil de velocidades</u>



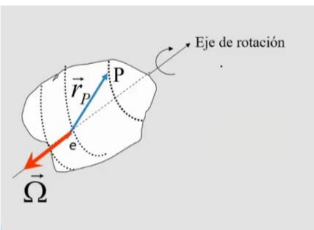
Traslación

Si un CR tiene diagramas vectoriales rectangulares de velocidad y/o aceleración, se mueve con traslación pura

Si la suma de todas las acciones que se ejercen sobre el CR da por resultado que $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ pero $\sum \overrightarrow{M_O} = \vec{0}$, entonces el CR se mueve con traslación pura.

Rotación pura

El rígido tiene un eje inmóvil y todo el cuerpo rota alrededor del eje (trayectorias circulares)



La velocidad angular va en la dirección del eje de rotación

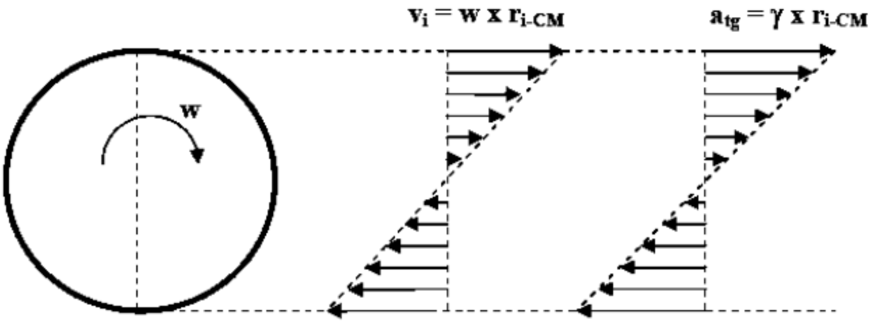
$\overrightarrow{v_P} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_P}$ (velocidad del punto respecto al eje inmóvil)

Los puntos en el eje de rotación tienen velocidad y aceleración nula.

$\overrightarrow{a_i} = \vec{\gamma} \times \overrightarrow{r_{i-A}} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{v_{i-A}}$

Si la suma de todas las acciones que se ejercen sobre el CR da por resultado que $\sum \vec{F} \neq \vec{0}$ y $\sum \overrightarrow{M_O} \neq \vec{0}$, entonces el CR se mueve con rotación pura.

<u>Perfil de velocidades</u>



Nota: no es la aceleración total de los puntos del diametro elegido, solo la aceleración tangenial (falta la normal)

Diagramas son doble triangulares y simétricos

Roto-traslación

Un CR se mueve con una velocidad de traslación $\overrightarrow{v_{CM}}$ y al mismo tiempo rota con velocidad angular Ω.

Superposición de una traslación del CM con una rotación del CM.

Si la suma de todas las acciones que se ejercen sobre el CR da por resultado que $\sum \vec{F} = \vec{0}$ pero $\sum \overrightarrow{M_O} \neq \vec{0}$, entonces el CR se mueve con rototraslación.

<u>Introducción</u>

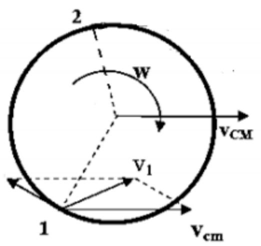
Fijo un punto "O" en el laboratorio y considero dos puntos del rígido "A" y "B"

La velocidad de B respecto de A en un cuerpo o sistema rígido es una rotación de B alrededor de A

$\overrightarrow{V_{B-A}} = \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_{B-A}}$

Si consideramos que el punto A tiene cierta velocidad respecto del laboratorio "velocidad de arrastre", la velocidad de B respecto al laboratorio será:

$\overrightarrow{V_{B-O}} = \overrightarrow{V_{A-O}} \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_{B-A}}$ ECUACIÓN DE ROTO-TRASLACIÓN DEL CR



<u>Propiedades</u>

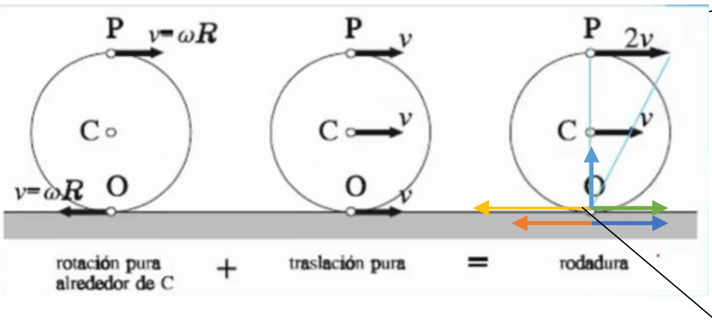
1) Todos los puntos de un eje de rotación paralelo al eje de rotación tienen la misma velocidad
2) Puedo usar cualquier punto del cuerpo rígido para describir el movimiento
3) Puedo usar el CM para describir el movimiento

<u>Ecuaciones importantes (según fontana)</u>

$$\overrightarrow{V_P} = \overrightarrow{V_Q} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_{PQ}} \qquad \overrightarrow{V_P} = \overrightarrow{V_{CM}} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_P^*}$$

$$\overrightarrow{r_{PQ}} = \overrightarrow{r_P} - \overrightarrow{r_Q}$$

Rodamiento sin deslizamiento



Tengo la Vcm y la V de rotación apuntando al mismo lado → 2Vcm es la velocidad en el punto más alto

Condición de rodadura: el movimiento del CR se produce apoyado sobre una superficie. El CR puedo o no deslizar respecto a la superficie

Amarillo: velocidad debido a la rotación.
Verde: velocidad debido a la traslación

Si en ese punto V = 0 → Vcm = Vrotación

$v_{cm} = \Omega . R \qquad a_{cm} = \gamma . R$

La aceleración tangencial es nula en el punto de apoyo $\overrightarrow{a_{cm}} = \vec{\gamma} \times \overrightarrow{r_{cm-p}}$

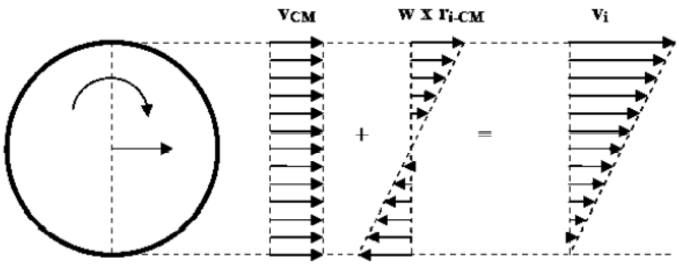
Dos visiones:

1. Rotación y traslación pura alrededor del CM
2. Rotación pura alrededor del punto de apoyo

Velocidad en el punto de contacto con la superficie es 0

Solo tengo aceleración normal en el punto de apoyo ´

$\overrightarrow{a_P} = \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_{P-CM}}$ donde P es el CIR



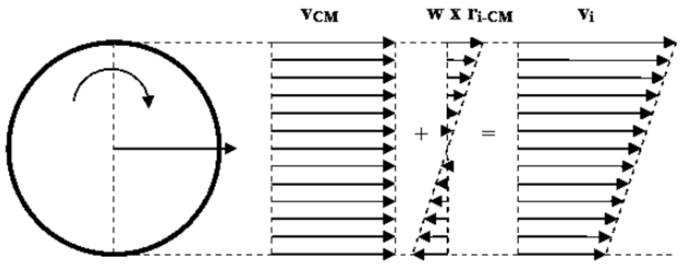
Aceleración

$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\gamma} \times \overrightarrow{r_{B-A}} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \overrightarrow{r_{B-A}}$ donde "A" es mi punto fijo

Aceleración tangencial Aceleración centrípeta

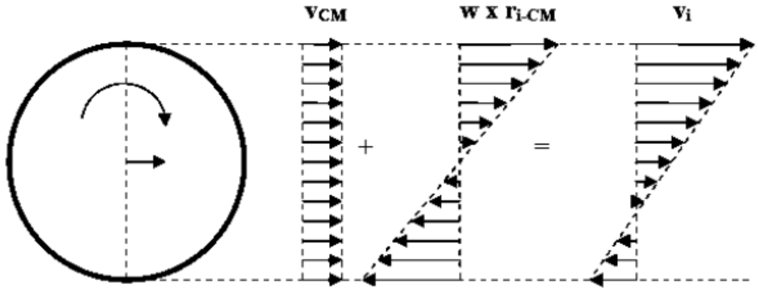
Distintos diagramas característicos

1) La velocidad de traslación es de mayor intensidad que la de rotación (me traslado más rápido de lo que roto). CIR fuera del punto de apoyo



Si el cuerpo se mueve respecto del piso, la velocidad del punto de contacto tiene el sentido de la velocidad de traslación. Aparece la fuerza de rozamiento dinámica que se opone al deslizamiento entre ambas superficies.

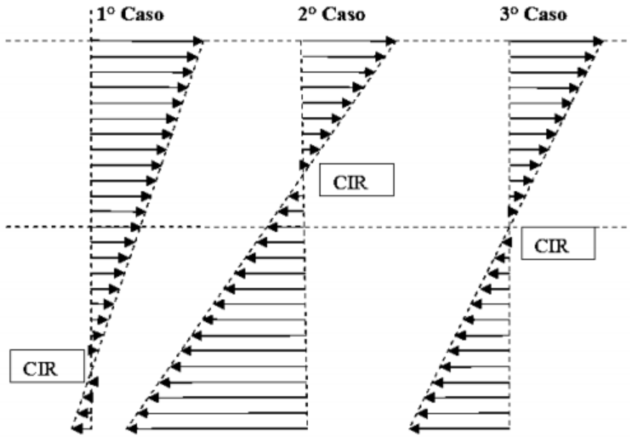
2) El cuerpo tiene mayor velocidad de rotación que de traslación. CIR arriba del piso



Si el cuerpo se mueve respecto del piso, la velocidad del punto de contacto tiene el sentido contrario velocidad de traslación.

Centro instantáneo de rotación

Punto de velocidad 0: CIR



Un punto (que puede pertenecer o no al CR) desde el cual el cuerpo está haciendo una rotación pura (las velocidades de todos los puntos son perpendiculares a la recta que los une con el CIR). Entonces ese punto tiene velocidad nula.

$$\overrightarrow{v_{CM-CIR}} = \vec{\Omega} \times \vec{r}_{CM-CIR}$$

$$\overrightarrow{v_{CIR}} = \overrightarrow{v_{cm}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}_{CIR-CM}$$

En forma gráfica, se determina al intersecar las rectas perpendiculares a las velocidades conocidas de dos puntos del CR. Por este punto pasa el eje instantáneo de rotación

$$\vec{v}_{CM-CIR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \Omega \\ -x_{CIR} & -y_{CIR} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_{CM-CIR} = y_{CIR}\Omega\,\breve{\imath} - x_{CIR}\Omega\,\breve{\jmath}$$

DINÁMICA DEL CUERPO RÍGIDO

Primera ecuación fundamental

$$\sum F_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M.\overrightarrow{a_{CM}}$$

Relacionada con la traslación del cuerpo rígido

El movimiento del CM está determinado por las Fuerzas externas

El CR puede estar girando o no pero el movimiento del CM solo depende de las Fuerzas externas

$$\sum F_{ext} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \rightarrow \vec{P} = cte$$

Segunda ecuación fundamental

Teorema de conservación de la cantidad de momento angular

$\overrightarrow{L_O} = m.R^2.\vec{\Omega} = I_O.\vec{\Omega}$ $\rightarrow$ la velocidad y el momento angulares tienen la misma dirección y sentido

$$\sum \tau_{ext}^{o} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = I_O.\vec{y}$$

Donde el punto O es el CM o el CIR

$$\sum \tau_{ext}^{o} = \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} \rightarrow L_O = cte \leftrightarrow \sum \tau_{ext}^{o} = 0$$

Momento de inercia

INERCIA: tendencia de un cuerpo a seguir moviéndose una vez iniciado su movimiento

La inercia es la resistencia que la materia presenta al cambio de movimiento (adquirir aceleración). El momento de inercia, por su parte, puede pensarse como una inercia de rotación, la resistencia que un cuerpo presenta a modificar su estado rotacional (adquirir aceleración angular) ---> se produce ante la existencia de un torque neto aplicado (causa)

Es la inercia de rotación de un cuerpo, depende de la distribución de la masa respecto de un eje de rotación.

Los cuerpos rígidos giran en un eje de simetría (que pasa o sea paralelo al CM) y que el objeto se mueve en el plano.

Conjunto de partículas particulares puntuales: $I_O = \sum M_i \,.\, r_{io}^2$

Conjunto de partículas continuo: $I_O = \int r^2.dm$

<u>Variación del momento de inercia</u>

1) Debido a la masa. La masa de un cuerpo permanece constante, pero se le puede agregar otro cuerpo con masa o se le puede quitar una parte
2) Alterar la distribución geométrica de la masa del cuerpo

<u>Momento inercia de cuerpos homogéneos respecto del CM</u>

1) Anillo o cilindro hueco $I_{CM} = MR^2$
2) Disco o cilindro macizo $I_{CM} = \frac{1}{2}MR^2$
3) Esfera hueca $I_{CM} = \frac{2}{3}MR^2$
4) Esfera maciza $I_{CM} = \frac{2}{5}MR^2$

5) Barra $I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$

Si tengo varios cuerpos→ suma total = suma de los momentos de inercia de cada uno

Teorema de Steiner

Permite encontrar el momento de inercia respecto a un eje que no pasa por el CM con el momento de inercia de un eje que pasa por el CM. CONDICIÓN ----> EJES SEAN PARALELOS

$I_O = I_{CM} + M d^2_{O/CM}$ Donde d es la distancia entre los ejes paralelos

Momento cinético respecto a un eje cualquiera

$$\overrightarrow{L_e} = I_{CM}\vec{\Omega} + \overrightarrow{r_{CM}} \times M\overrightarrow{v_{CM}}$$

El primer término es momento cinético relativo al CM (momento cinético de spin)

El segundo término es el momento cinético como si toda la masa del SP estuviera en el CM (momento cinético orbital)

Momento cinético relativo al CIR

Supongo que el sistema de coordenadas está ubicado en el CM (sus coordenadas son nulas) y que los ejes son paralelos entre sí

$$\vec{L}_{orbital} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -x_{CIR} & -y_{CIR} & 0 \\ y_{CIR}\Omega & -x_{CIR}\Omega & 0 \end{vmatrix} M$$

$$\vec{L}_{orbital} = (x^2_{CIR} + y^2_{CIR}) M\,\Omega\,\breve{k}$$

La expresión entre paréntesis en la distancia entre los ejes al cuadrado

$$\overrightarrow{L_{CIR}} = I_{CM}\vec{\Omega} + M\vec{\Omega}d^2 \rightarrow \quad \overrightarrow{L_{CIR}} = (I_{CM} + Md^2)\vec{\Omega}$$

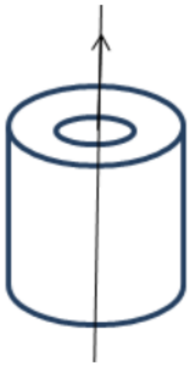
Entre paréntesis es el momento de inercia del CIR respecto del eje paralelo al baricentro que pasa por el CIR

----> Aplico el teorema de Steiner $\overrightarrow{L_{CIR}} = I_{CIR}\vec{\Omega}$

Momento de inercia son aditivos y substractivos

Encontrar el momento de inercia de un cuerpo complejo podemos considerarlo como la suma o la diferencia de dos cuerpos simples cuyos momentos de inercia conocemos.

<u>Substractivos</u>



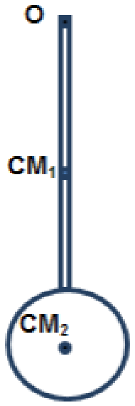
El momento de inercia de un cilindro hueco respecto de su eje de simetría es diferencia del momento de inercia del cilindro exterior que supondremos de radio R y el cilindro interior que supondremos de radio r. El momento de inercia de un cilindro macizo respecto de un eje coincidente con su eje de simetría es:

$\mathrm{M}I_{CM} = ½\,\mathrm{M}\,\mathrm{R}^2$

$$I^{TOTAL}_{CM} = ½\,(\mathrm{M_{ext}}\,\mathrm{R}^2 - M_{int} r^2)$$

$$I^{TOTAL}_{CM} = ½\,\mathrm{M}(\mathrm{R}^2 + r^2)$$

Aditivos



Supongamos tener un cuerpo compuesto formado por una varilla que tiene una esfera pegada en uno de sus extremos. Si la hacemos oscilar alrededor de un eje perpendicular al eje de simetría de la varilla que pase por O.

Datos:

- Masa de la varilla Mv
- Masa de la esfera Me
- Longitud de la varilla L
- Radio de la esfera

Momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a su eje de simetría que pasa por su CM

$$I_{CM}^{varilla} = \frac{1}{2} M_v L^2$$

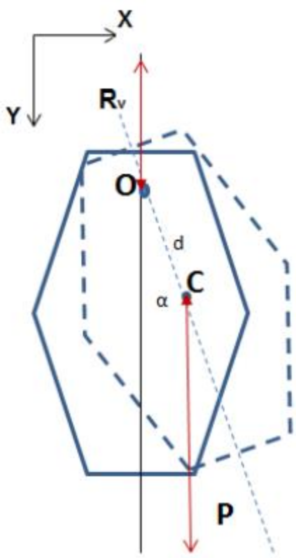
Momento de inercia de la esfera respecto a un eje baricéntrico es

$$I_{CM}^{esfera} = {}^{2}/_{5}\ M_E R^2$$

Aplico el teorema de Steiner a ambos cuerpos:

$$I_O^{TOTAL} = \frac{1}{2} M_v L^2 + M_v \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{2}{5} M_E R^2 + M_E (L+R)^2$$

Péndulo físico



El cuerpo solo puede moverse alrededor del punto O fijo (del cual cuelga) con rotación pura ---> punto O constituye el CIR para todo el movimiento.

El eje z queda hacia atrás (sentido horario como positivo).

Fuerzas que actúan: PESO y reacción de vínculo en o Rv

Solo el Peso produce torque respecto de O ya que la recta de acción de Rv pasa por O. Siendo d la distancia entre O y el CM:

El torque del peso es: $\begin{vmatrix} i & j & k \\ d sen\alpha & d cos\alpha & 0 \\ 0 & P & 0 \end{vmatrix} = P\, d\, sen\, \alpha\, \breve{k}$

Energía en el CR

Energía potencial gravitatoria

Considero la altura del CM desde el punto de referencia de Ep = 0

$$E_{pg} = Mgh_{CM}$$

Energía cinética del CR

Dos expresiones:

1) $E_C = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\Omega^2$
    - Tengo dos términos uno referido a la traslación y otro a la rotación
2) $E_C = \frac{1}{2}I_{CIR}\Omega^2$
    - En la rodadura sin deslizamiento.

Trabajo y energía

$$\sum W_{fnc}^{externas} = \Delta E_m$$

(teniendo en cuenta tanto fuerzas internas como externas)

El trabajo de las fuerzas interiores para un CR es 0 por la condición de rigidez.

Trabajo en la traslación

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}.d\overrightarrow{r_{CM}}$$

Donde $d\overrightarrow{r}$es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza --> mismo que la distancia que recorre el CM

$$W_F = \vec{F}.cos\alpha.d$$

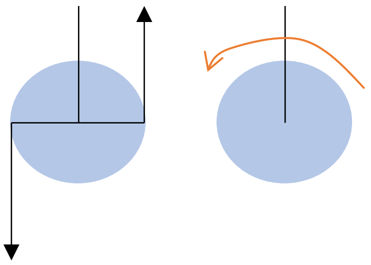
Después de que actúen las Fuerzas ---> la $\vec{v}_{cm}$aumentó. Este trabajo genera un aumento de la Ec de traslación

Trabajo en la rotación

Si una fuerza hace torque entonces hace trabajo. Pueden ser positivos o negativos dependiendo como se mueve

$$W_T = \int_{\Theta_A}^{\Theta_B} \vec{\tau}_{CM} d\Theta$$

Puedo tener un torque neto sin tener fuerza neta: si



Suma fuerzas externas = 0

$F \times R = FRk \qquad -F \times -R = FRk$

$\vec{\tau}_{CM} = 2FR$ → toque va a acelerar al sistema

Ejemplo: "toque de frenado" hace trabajo negativo

$$\Delta E_{C-rot} = \frac{1}{2}I_{CM}\Omega_B^2 - \frac{1}{2}I_{CM}\Omega_A^2$$

Roto-traslación

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}.d\overrightarrow{r_p}$$

Donde P es el punto de aplicación de la fuerza. Es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza.

- El desplazamiento es proporcional a la velocidad del punto

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}.d\overrightarrow{r_{CM}} + \int_{\Theta_A}^{\Theta_B} \vec{\tau}_{CM} d\Theta$$

Fuerza de rozamiento

<u>Análisis de la fuerza de rozamiento en el deslizamiento</u>

Cuando la velocidad del punto de contacto es distinta de 0, el CR desliza respecto del plano: rozamiento es dinámico.

Se realiza trabajo ---> la distancia que resbala el punto de apoyo ≠ de cuanto avanza el CM

<u>Análisis de la fuerza de rozamiento de un CR que se mueve rodando sin deslizar</u>

Velocidad del punto de contacto es 0, rueda sin deslizar --> fuerza de rozamiento es estática

Nota: ¡tiene la misma velocidad que la de la superficie! Si la superficie no se mueve tiene v=0 y si se mueve, tiene la velocidad de la superficie v = vs . En este último caso, la velocidad RELATIVA a la superficie si es 0.

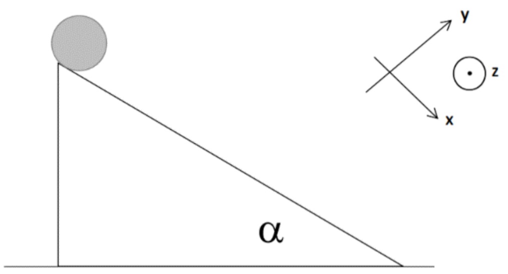
El desplazamiento del punto es contacto es 0, por eso el trabajo de la fuerza de rozamiento es nulo.

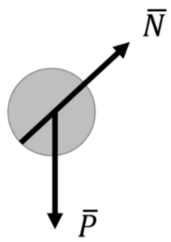
- Si la única fuerza no conservativa que puede producir trabajo en el sistema es la fuerza de rozamiento, se conserva la energía mecánica del sistema
- En el movimiento roto-tralatorio la fuerza de rozamiento se pone en evidencia de manera de que el CR alcance el estado de rodar sin deslizar

Método de resolución

1) Realizar el DCL
2) Si el cuerpo está rodando sin deslizar, pero tiene una fuerza neta aplicada en el CM se debe estudiar el efecto de esta fuerza

Caso 1) objeto cae rodando sin deslizar





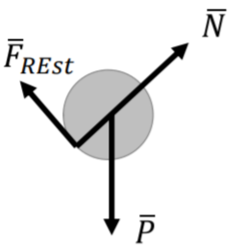
Al estar rodando hacia abajo, la velocidad angular es hacia "adentro" de la pantalla. (Para este sistema de coordenadas la velocidad angular es negativa). $\otimes\ \bar{\Omega}$

Como se mueve cada vez más rápido, la aceleración angular tiene el mismo sentido que la velocidad angular. $\otimes\ \bar{\gamma}$

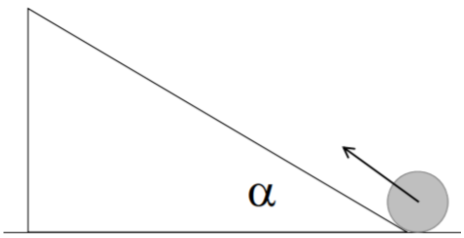
$$\sum \bar{T}_{CM} = I_{CM}\bar{\gamma}$$

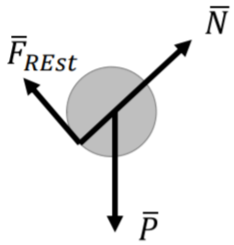
$$\underbrace{\cancel{\bar{T}^{P}_{CM}}}_{=0 \text{ porque } \bar{r}=\bar{0}} + \underbrace{\cancel{\bar{T}^{N}_{CM}}}_{=0 \text{ porque } \bar{r} \parallel \bar{N}} + \bar{T}^{Fr}_{CM} = I_{CM}\bar{\gamma}$$

$$\bar{r}_{CM\to CIR} \times \bar{F}_r = \underbrace{I_{CM}\bar{\gamma}}_{\otimes}$$



Caso 2) objeto sube rodando sin deslizar





Al estar rodando hacia arriba, la velocidad angular es hacia “afuera” de la pantalla. (Para este sistema de coordenadas la velocidad angular es positiva). $\odot$ $\overline{\Omega}$

Como se mueve cada vez más lento, la aceleración angular tiene sentido contrario a la velocidad angular. $\otimes$ $\overline{\gamma}$

-----> me queda IGUAL el planteo de las fórmulas que el anterior

EJEMPLOS

Un muchacho está sentado sobre un taburete sin rozamiento, que gira a velocidad constante. Con sus manos sostiene dos masas iguales. Sin mover sus brazos, suelta las dos masas

a) ¿Cambia la velocidad angular?
   Al soltar las masas que sostiene pierde masa -->queda sólo él pero con menos masa. Entonces pierde momento de inercia

   $\vec{L}^{CM} = I_{cuerpo}^{CM}\ \vec{\omega}$ Yo se que el momento de inercia es cte ya que no actúan torques externos que lo hagan variar.

   Para que el momento angular L se conserve debe aumentar la velocidad angular
b) Si encoge sus brazos, ¿varía su velocidad angular? ¿Por qué?
   Si el muchacho encoge los brazos, hace bajar su momento de inercia, lo que permite una más fácil rotación, en conclusión, aumenta la velocidad angular.
c) ¿Varía su energía cinética?
   Para que varíe la energía cinética de rotación, tiene que variar el segundo miembro de la ecuación:

   $E_{C\ cuerpo} = \frac{1}{2}\ I_{cuerpo}^{CM}\ \omega^2$ Varía según cambie la velocidad angular